Ogni primino sa che…

A cura della équipe di matematica del "Pascal"

15 giugno 2022

Da sempre al "Pascal", nei primi giorni di scuola, gli studenti delle classi prime di tutti gli indirizzi sostengono le prove di ingresso per verificare il livello delle competenze nelle materie di base. Queste prove, ancora oggi, sono le stesse per tutti gli indirizzi.

Ma quali sono le competenze in matematica che uno studente dovrebbe avere acquisito al termine delle scuole medie? Proponiamo qui un possibile elenco, seguito da alcuni esercizi come banco di prova. Buon lavoro!

Competenze in matematica

Numeri relativi → Sommare, sottrarre, moltiplicare e dividere i numeri interi relativi, applicando correttamente le regole dei segni; stabilire qual è il maggiore e qual è il minore tra due interi; calcolare espressioni più complesse, comprendendo le regole di precedenza delle operazioni e il significato delle parentesi; calcolare il massimo comune divisore e il minimo comune multiplo di due numeri interi.

Frazioni → Semplificare una frazione; portare due frazioni al (minimo) comune denominatore; confrontare due frazioni, stabilendo qual è la maggiore e qual è la minore; sommare, sottrarre, moltiplicare e dividere due o più frazioni; calcolare espressioni con le frazioni; passare alla notazione decimale; fare i calcoli con numeri in forma decimale limitata; comprendere e maneggiare le percentuali; usare le frazioni come operatori[1].

Potenze → Calcolare le potenze a esponente naturale di un numero intero positivo o negativo e di una frazione; conoscere e applicare le regole di precedenza e le proprietà delle potenze (prodotto o quoziente di potenze con la stessa base; prodotto o quoziente di potenze con lo stesso esponente; potenza di una potenza); conoscere e calcolare le potenze con esponente intero negativo (ad esempio le potenze del 10);

Proporzioni → Saper riconoscere la proporzionalità diretta; risolvere semplici problemi con l'uso delle proporzioni; ricavare il termine mancante in una proporzione.

Geometria → Conoscere le principali figure piane (triangoli e loro altezze, mediane e bisettrici; quadrilateri e loro diagonali) e solide (parallelepipedo, prisma, piramide, tetraedro, cubo, ottaedro); interpretare il testo di un problema di geometria e tracciare

[1] Ad esempio per prendere i $\frac{5}{7}$ di una certa quantità (usando cioè questa frazione come moltiplicatore).

la figura con cura; non aver paura di disegnare; calcolare l'area e il perimetro delle principali figure piane; conoscere e applicare il teorema di Pitagora.

Statistica e probabilità $\rightarrow$ Calcolare media aritmetica, moda, mediana e campo di variazione di una serie di dati; leggere e costruire tabelle e grafici; calcolare la probabilità di semplici eventi come rapporto tra casi favorevoli al loro realizzarsi e casi possibili.

Insiemi $\rightarrow$ Conoscere i concetti di insieme, elemento, sottoinsieme; rappresentare gli insiemi con i diagrammi di Venn; saper unire e intersecare gli insiemi.

Risoluzione di problemi $\rightarrow$ Saper riassumere e rappresentare la situazione descritta nel problema per capire qual è la richiesta; riconoscere nel testo i dati utili per la sua risoluzione e ricavare eventuali dati intermedi mancanti; sopportare un po' di frustrazione se il problema non si lascia risolvere facilmente e non fermarsi al primo tentativo fallito; controllare se il risultato ottenuto è sensato.

Scrittura della pagina $\rightarrow$ Scrivere in modo chiaro e leggibile, riempiendo con ordine la pagina e lasciando un po' di spazio intorno per eventuali commenti o correzioni dell'insegnante; nei fogli che si consegnano, svolgere gli esercizi nell'ordine in cui sono proposti, scrivendo il numero dell'esercizio e indicando sempre nome, cognome e classe; tracciare disegni e figure con cura.

Esercizi per verificare le competenze

Le conoscenze richieste per affrontare questi esercizi dovrebbero essere le conoscenze di base acquisite alle scuole medie (alcuni termini sono comunque spiegati con una nota a piè di pagina). Non sempre però gli esercizi sono facili. Dunque non scoraggiatevi subito, ma rileggete il testo, cercando di capire qual è la richiesta. Non ci aspettiamo che sappiate già la risposta a tutte le domande, ma piuttosto che vi incuriosiate e proviate a cercarla per conto vostro, magari facendo prima diversi errori.

1. Disponi in ordine crescente i seguenti otto numeri interi relativi:
$$7 \quad -8 \quad 1 \quad 0 \quad -5 \quad 4 \quad -100 \quad -101.$$

2. Quanto fa $\underbrace{(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot\ \dots\ \cdot(-1)}_{\text{2022 volte}}$?

3. Quanto fa $\Big[(-1)\cdot 2\cdot(-3)\cdot 4\cdot(-5)\cdot 6\cdot(-7)\Big] : \Big[7\cdot(-6)\cdot 5\cdot(-4)\cdot 3\cdot(-2)\cdot 1\Big]$?

4. Quanti sono i numeri interi relativi maggiori di 13 e minori di 17? Quanti sono quelli maggiori di -8 e minori di -2? Quanti sono quelli maggiori di -5 e minori di 4? Quanti sono i numeri interi relativi maggiori di m e minori di n, sapendo che $m < n$?

5. Calcola con le potenze:

   $2^3 \cdot 2^7 = \ \dots \qquad 2^{18} : 2^8 = \ \dots \qquad (2^5)^2 = \ \dots \qquad 14^{10} : 7^{10} = \ \dots \qquad 12^5 : 3^5 = \ \dots$

6. Quanto fa $3^{2021} + 3^{2021} + 3^{2021}$? (*Suggerimento: quanti sono gli addendi?*)

7. Sai esprimere come potenza di 2 il quadrato del quadrato del quadrato di 8?

8. Quanto fa $(-3)^2 : (-3^2)$? (*Attenzione alla differenza tra le due parentesi!*)

9. Calcola questa espressione: $[(3^3 + 3) \cdot (2^4 - 2^2) : 60]^3 \cdot [(6^2)^3]^2 : 6^7 : 6^6$.

10. Il numero 2^{2021} è pari o dispari? Quanto fa invece la metà di 2^{100}? E il suo doppio?

11. Calcola questa espressione: $(6^3)^3 : 36^4 \cdot 6 + (2 \cdot 3)^6 : 6^5$.

12. Spiega con un esempio il significato di ciascuno dei seguenti termini:

    addizione, addendo, somma; sottrazione, differenza; moltiplicazione, fattore, prodotto; divisione, dividendo, divisore, quoziente, resto; inverso; opposto; numero primo; massimo comune divisore (di due o più numeri); minimo comune multiplo (di due o più numeri); numeri relativamente primi.

13. Sai scomporre in fattori primi i numeri 24; 300; 36? Sai calcolare il loro minimo comune multiplo ed il loro massimo comune divisore?

14. Calcola il minimo comune multiplo ed il massimo comune divisore di:
    a) 282; 327; 423;
    b) 14^2; 21^2; 7^3;
    c) 12^2; 6^3; 18^2.

15. In una classe, il compito di matematica ha prodotto i risultati riportati nella seguente tabella:

voto	numero di studenti che lo hanno preso
10	0
9	1
8	2
7	4
6	6
5	3
4	4
3	0
2	0

    Quanti sono gli studenti della classe? Quanti studenti hanno ottenuto una votazione maggiore o uguale a 6? Qual è la percentuale degli studenti che hanno preso un voto minore di 6?

16. Sai tradurre in simboli le seguenti espressioni?
a) *"Il triplo della differenza tra x e il doppio di y eguaglia la differenza tra il triplo di x e il sestuplo di y"*;
b) *"la metà del prodotto tra x e y è inferiore al doppio del loro quoziente"*;
c) *"i due terzi della somma di a e b non supera l'opposto della somma di a con i due terzi di b"*;
d) *"la somma dei reciproci di a e di b è uguale alla differenza tra i loro opposti"*.

17. Quanto fa $0,3 \times 0,3$? E quanto fa $10 : 0,1$? Calcola infine $\dfrac{(0,2)^3}{0,4}$.

18. Sai cosa vuol dire 10^{-3}? Calcola allora l'espressione: $327 \cdot 10^{-4} + 39 \cdot 10^{-3} - 2,7 \cdot 10^{-2}$.

19. Sapendo che $x = -3$, calcola le seguenti quantità:
$$x + 2; \qquad 2x - 3; \qquad 6 - (x + 2); \qquad (-x - 5)^2.$$

20. Se $x = 2$ e $y = 3$, allora quanto vale $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$?

21. Calcola le seguenti quantità: il doppio di $\frac{3}{4}$; il triplo di $\frac{3}{2}$; la metà di $\frac{4}{3}$.

22. Facendo un disegno opportuno, individua sulla retta orientata i numeri $\frac{3}{2}$, -2 e $-\frac{-13}{4}$, avendo scelto come unità di misura un segmento di 4 quadretti.

23. Tra quali numeri interi è compresa la frazione $-\frac{13}{6}$? (*Indica gli interi più vicini.*)

24. Sai trovare una frazione compresa tra $\frac{7}{9}$ e $\frac{8}{9}$? (*Ricorda che le frazioni sono rapporti di numeri interi.*)

25. Disponi in ordine crescente le frazioni $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{9}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{6}{5}$; $\frac{1}{2}$.

26. Calcola il quadrato di $-\frac{3}{4}$, il cubo di $-\frac{3}{2}$ e la radice quadrata di $\frac{4}{25}$.

27. Calcola la seguente espressione che contiene sia numeri decimali che frazioni e verifica che il risultato è uguale alla probabilità che si ha, scegliendo a caso un dito della mano destra, di scegliere proprio il mignolo:
$$-0,7 + \frac{3}{2} - \left[0,4 - \left(\frac{1}{7} \cdot 1,5 - \frac{2}{35} + \frac{1}{7}\right) + 0,5\right]$$

28. Qual è quel numero che supera di 6 unità i suoi $\frac{3}{4}$?

29. Verifica che il risultato della seguente espressione è uguale al numero di spigoli (cioè al numero di "lati") del tetraedro:
$$2 + \left[\frac{(-2)^2 + 10 + (-5)^2}{-2 - 5} - \frac{(-2)^2 - 10 + (-5)^2}{-5 + 2}\right] : \frac{4}{21}$$

30. Calcola la seguente espressione: il risultato dovrebbe essere l'opposto del numero delle facce del tetraedro.

$$(-2)^5 : (-2)^3 + \left\{-2 + \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) - 1\right] + \frac{2}{15}\right\}^3$$

31. Calcola la seguente espressione, il cui valore dovrebbe dare il numero di *vertici* del cubo:

$$(-2)^4 + \left\{\left[-2^4 : \left(3 + \frac{1}{5}\right) + 1\right]^2 \cdot \left(1 - \frac{7}{6}\right)\right\}^2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^3 + 16$$

32. Secondo te, per quali valori di n la frazione $\frac{n}{3}$ è maggiore della frazione $\frac{7}{3}$?

33. Secondo te, per quali valori di n la frazione $\frac{7}{n}$ è maggiore della frazione $\frac{7}{23}$?

34. Il risultato di questa espressione è uguale o no al numero di vertici del tetraedro?

$$\left[\left(2 - \frac{2}{3}\right)^3 : \left(\frac{4}{3}\right)^2\right]^2 \cdot \left\{\left[\left(-\frac{3}{2}\right)^5\right]^4 : \left[\left(-\frac{3}{2}\right)^3\right]^6\right\}$$

35. Un libro ha 630 pagine e $\frac{2}{5}$ di esse sono illustrazioni, delle quali $\frac{1}{3}$ sono a colori. Quante sono le pagine illustrate a colori?

36. Quanto vale l'inverso della differenza tra $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$?

37. In una classe i $\frac{3}{5}$ degli studenti, cioè 18 alunni, sono maschi. Quante sono le femmine?

38. Verifica che il risultato della seguente espressione coincide con il numero di *numeri primi*[2] compresi tra 24 e 28:

$$\left[\frac{(-2+7)\cdot(-2-7)}{(-2)^2+21} - \frac{1}{5}\right]^3 : \left[-(-2)^2\right]^3 + \frac{1}{(-5+3)^3}$$

39. Calcola con pazienza la seguente espressione

$$\left[\frac{\frac{2}{3}}{-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}} - \frac{(-\frac{1}{2})^2}{(-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{3}}\right] : \frac{(-\frac{1}{2})^3 - \frac{1}{3} + \frac{2}{9}}{(-\frac{1}{2})^2 - (\frac{2}{3})^2}$$

e verifica che il risultato coincide con il *campo di variazione*[3] dei seguenti dati statistici:

$$1,5 \qquad 2 \qquad 2,3 \qquad 0,5 \qquad 1,9 \qquad 0,3 \qquad 1,2 \qquad 2,1$$

40. Una damigiana contiene vino per $\frac{1}{3}$ della sua capacità. Aggiungendo 10 litri di vino la damigiana risulta piena per $\frac{3}{4}$ della sua capacità. Qual è la capacità della damigiana?

[2] Un numero maggiore di 1 è *primo* se è divisibile solo per sé stesso e per 1. Ad esempio, 6 non è primo perché è divisibile anche per 2 e per 3, invece 7 è primo perché è divisibile solo per 1 e per 7.

[3] Il *campo di variazione* di un insieme di numeri è la differenza tra il più grande ed il più piccolo di essi.

41. I $\frac{2}{9}$ dei passeggeri di una nave scendono a Genova, i $\frac{3}{8}$ di quelli rimasti a bordo scendono a Napoli e gli ultimi 105 scendono a Venezia. Quanti erano complessivamente i passeggeri della nave? Quanti sono scesi a Genova? Quanti a Napoli? (*Forse un "diagramma ad albero" può aiutare...*)

42. Quanto valgono il valore assoluto, l'opposto ed il reciproco di $-\frac{17}{3}$?

43. La produzione di un bene ha registrato i dati riportati nella seguente tabella:

anno	unità prodotte
2010	345
2011	276
2012	138

Qual è stato il decremento percentuale dal 2010 al 2011? E dal 2011 al 2012? Costruisci un diagramma a barre che rappresenti l'andamento della produzione nei tre anni.

44. Due numeri interi positivi stanno tra loro come 2 sta a 3. Se la somma dei due numeri è 35, quanto valgono i due numeri?

45. Sulla carta a quadretti, una bandiera ha la forma di un rettangolo di dimensioni 5×9 quadratini. Esattamente al centro è disegnata una croce blu, dello spessore di un quadratino, che divide la bandiera in quattro rettangoli gialli congruenti. Qual è la percentuale dei quadratini blu rispetto al totale?

46. Se in una città c'è un matematico ogni 250 abitanti, qual è la percentuale dei matematici?

47. La media delle 4 interrogazioni di Carlo è 7 e mezzo. Può Carlo, con una quinta interrogazione, portare la sua media a 8? Che voto dovrebbe prendere nella quinta interrogazione?

48. In un negozio la merce viene scontata del 30%. Un abito viene venduto a 84 euro. Quanto costava l'abito prima di essere scontato?

49. Se il quadrato di 11 è 121, allora il quadrato di 33 sarà il triplo di 121. Vero o falso? Perché?

50. Se aumentiamo la lunghezza della base di un rettangolo del 20% e quella dell'altezza del 50%, si può dire di quanto aumenta l'area in percentuale?

51. Un secchio pieno di sabbia pesa complessivamente 13 Kg; riempito per metà di sabbia pesa 7 Kg. Quanto pesa il secchio vuoto?

52. In una classe, gli studenti hanno i seguenti numeri di scarpe:

$$37; 42; 38; 40; 35; 44; 42; 38; 39; 36; 40; 44; 37; 42; 43; 41; 35; 39; 45; 42; 42; 36; 43; 42.$$

Calcola la media, la moda, la mediana e il campo di variazione di questi dati. Costruisci inoltre la tabella delle frequenze e il relativo istogramma.

53. Verifica che il risultato della seguente espressione è il numero di *vertici* dell'ottaedro:

$$\frac{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{5}{3}\right)^2 - 5}{\left(\dfrac{5}{3} - \dfrac{3}{2}\right)^3}$$

54. In tutto, in una scuola di 1000 studenti, quelli che amano leggere sono 450, quelli che praticano uno sport sono 600 e quelli che fanno entrambe le cose sono 100. Quanti studenti non fanno né l'uno né l'altro? (*Suggerimento: usa un diagramma di Venn.*)

55. Verifica che la seguente espressione dà la probabilità di fare 6 lanciando un dado:

$$\left\{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^3\right] : \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^2\right]\right\} : \left(2 + \frac{4}{9}\right) - \frac{7}{12}$$

56. Un rubinetto riempie una vasca in 6 minuti. Un altro rubinetto la riempie in 3 minuti. Se i due rubinetti sono aperti insieme, dopo quanto tempo la vasca sarà piena?

57. Calcola la seguente espressione e verifica che il risultato è il numero massimo di facce di un dado (cubico) che si possono vedere simultaneamente (con un occhio solo):

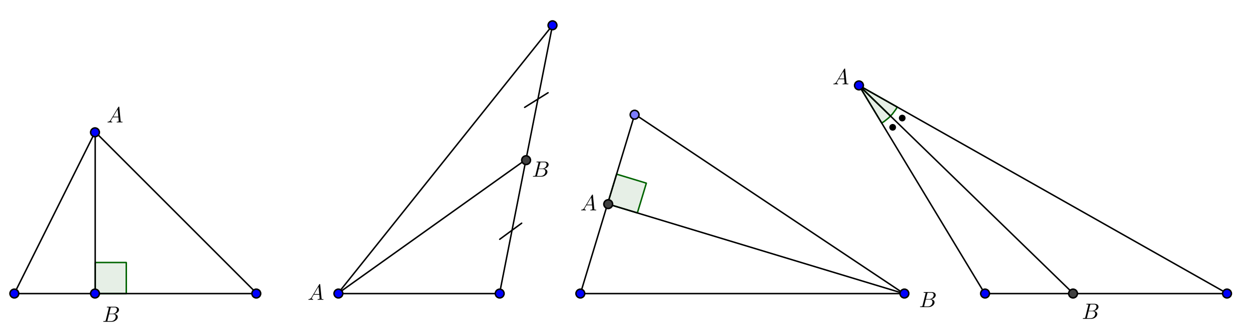
$$-\left[1 - \left(-\frac{5}{3}\right)^{-2}\right]^0 : \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right]^{-1}$$

58. Se l'insieme A è un sottoinsieme dell'insieme B (cioè $A \subseteq B$), e l'insieme B ha 100 elementi, che cosa si può dire del numero di elementi di A?

59. Per l'acquisto di due libri si spendono 47 euro in tutto e il prezzo di un libro è pari ai $\frac{9}{11}$ di quello dell'altro. Determinare il prezzo di ciascuno dei due libri.

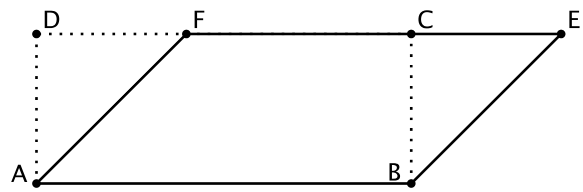
60. Se sappiamo che l'insieme A ha 30 elementi e che l'insieme B ne ha 50, che cosa possiamo dire del numero di elementi di $A \cup B$? E del numero di elementi di $A \cap B$?

61. Che cosa rappresenta il segmento AB in ciascuno dei seguenti triangoli?

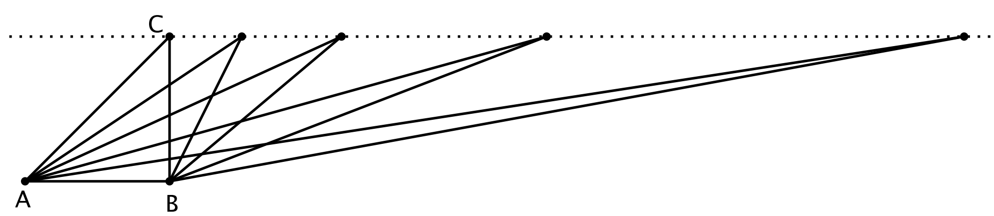


(a) (b) (c) (d)

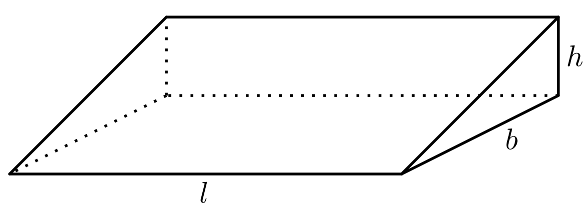
62. È vero che il rettangolo $ABCD$ ed il parallelogramma $ABEF$ nella figura sottostante hanno la stessa area? Sai spiegare perché?



63. Se il vertice C del triangolo ABC (rettangolo in B) viene fatto scorrere verso destra, *parallelamente alla base AB* allora la forma del triangolo cambia. Cambiano anche il suo perimetro e la sua area?



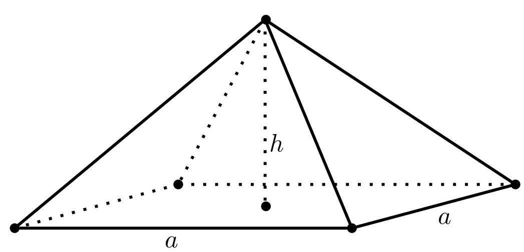
64. Calcola l'area del piano inclinato qui raffigurato (cioè solo la faccia "inclinata") sapendo che $l = 14\,cm$, $b = 12\,cm$ ed $h = 5\,cm$.



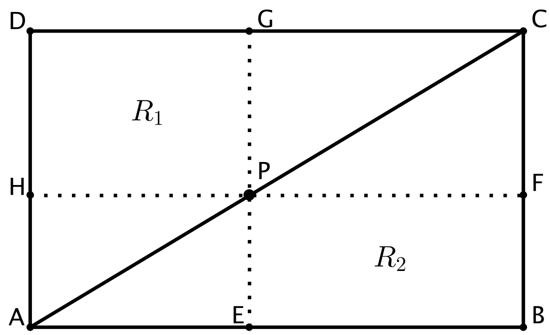
65. Hai un compasso e un righello e, con la massima precisione possibile, devi costruire un triangolo avente i lati lunghi esattamente 5 cm, 6 cm e 7 cm. Come fai?

66. Esiste un triangolo rettangolo con i lati lunghi 39 mm, 80 mm e 89 mm? Perché?

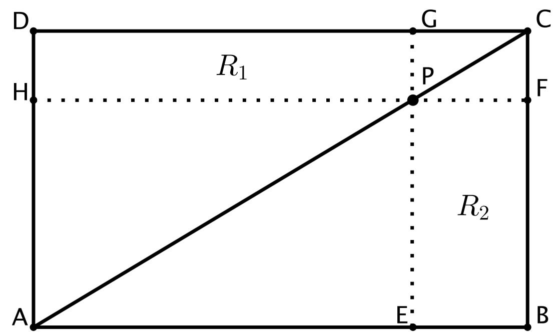
67. Calcola la superficie laterale della piramide a base quadrata qui raffigurata, sapendo che $a = 8\,cm$ e $h = 3\,cm$.



68. Sulla diagonale AC del rettangolo $ABCD$ in Figura (a) è stato scelto un punto P e da P sono state tracciate le parallele ai lati del rettangolo, formando i rettangoli R_1, di vertici $HPGD$, e R_2, di vertici $EBFP$. Servendoti di un righello, calcola in modo approssimato l'area di R_1 e R_2 e confronta i loro valori. Nella Figura (b) la posizione di P su AC è stata cambiata e la costruzione è stata ripetuta: calcola nuovamente l'area di R_1 e R_2 nella nuova posizione e confronta i loro valori. È un caso?[4]



(a) *Prima posizione di P.*

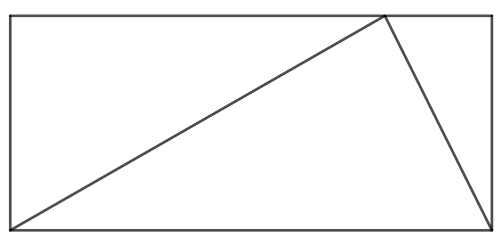


(b) *Seconda posizione di P.*

69. Perché i rettangoli R_1 e R_2 dell'Esercizio 68, nonostante abbiano forme diverse, hanno sempre la stessa area, qualunque sia la posizione di P sulla diagonale AC?

   (*Suggerimento: ragiona su tutti i triangoli che si formano dentro al rettangolo.)*

70. Considera un triangolo all'interno di un rettangolo come in figura:[5]



   Quanta parte della superficie del rettangolo è occupata dal triangolo? Perché è proprio così?

   (*Suggerimento: traccia un'altra linea...)*

71. Supponi di sapere sia la somma che la differenza di due numeri incogniti x e y. Come puoi fare per trovare i due numeri x e y?

---

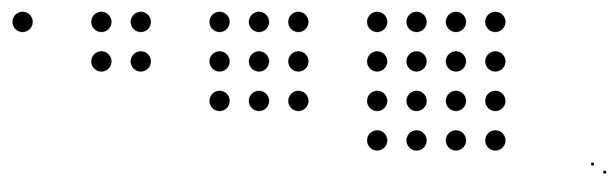
[4] Questo esercizio e il successivo sono tratti da A. Bernhard, *Geometria per la settima e ottava classe della Scuola Waldorf*, Educazione Waldorf edizioni, 2011.

[5] Questo e i restanti problemi sono tratti tutti da P. Lockhart, *Contro l'ora di matematica*, Rizzoli 2010.

72. Vediamo che cosa succede a sommare tra loro i numeri dispari a cominciare da 1:

$$1 = 1$$
$$1 + 3 = 4$$
$$1 + 3 + 5 = 9$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$
$$\dots$$

Mmm... sembra che il risultato sia sempre un quadrato perfetto:



È un caso oppure è vero sempre che la somma dei numeri dispari è sempre un quadrato perfetto, non importa quanti numeri dispari si sommino? Perché?

(*Suggerimento: cerca una spiegazione di tipo "grafico".*)